

ÉRETTSÉGI VIZSGA • 2019. május 7.

MATEMATIKA

EMELT SZINTŰ ÍRÁSBELI VIZSGA

JAVÍTÁSI-ÉRTÉKELÉSI ÚTMUTATÓ

EMBERI ERŐFORRÁSOK MINISZTERIUMA

Fontos tudnivalók

Formai előírások:

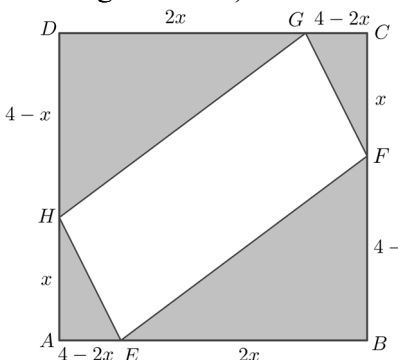
1. Kérjük, hogy a dolgozatot a vizsgázó által használt színűtől **eltérő színű tollal, olvashatóan** javítsa ki.
2. A feladatok mellett található szürke téglalapok közül az elsőben a feladatra adható maximális pontszám van, a javító által adott **pontszám a** mellette levő **téglalapba** kerüljön.
3. **Kifogástalan megoldás** esetén kérjük, hogy a maximális pontszám feltüntetése mellett kipipálással jelezze, hogy az adott gondolati egységet látta, és jónak minősítette.
4. Hiányos/hibás megoldás esetén kérjük, hogy **a hiba jelzése** mellett az egyes **részpontszámokat** is írja rá a dolgozatra. Ha a dolgozat javítását jobban követhetővé teszi, akkor a vizsgázó által elvesztett részpontszámok jelzése is elfogadható. Ne maradjon olyan részlet a megoldásban, amelyről a javítás után nem nyilvánvaló, hogy helyes, hibás vagy fölösleges.
5. A javítás során **alkalmazza az alábbi jelöléseket.**
 - helyes lépés: *kipipálás*
 - elvi hiba: *kétszeres aláhúzás*
 - számolási hiba vagy más, nem elvi hiba: *egyszeres aláhúzás*
 - rossz kiinduló adattal végzett helyes lépés: *szaggatott* vagy *áthúzott kipipálás*
 - hiányos indoklás, hiányos felsorolás vagy más hiány: *hiányjel*
 - nem érthető rész: *kérdőjel* és/vagy *hullámvonal*
6. Az ábrán kívül **ceruzával** írt részeket ne értékelje.

Tartalmi kérések:

1. Egyes feladatoknál több megoldás pontozását is megadtuk. Amennyiben azoktól **eltérő megoldás** születik, keresse meg ezen megoldásoknak az útmutató egyes részleteivel egyenértékű részeit, és ennek alapján pontozzon.
2. A pontozási útmutató pontjai tovább **bonthatók, hacsak az útmutató másképp nem rendelkezik.** Az adható pontszámok azonban csak egész pontok lehetnek.
3. Ha a megoldásban **számolási hiba**, pontatlanság van, akkor csak arra a részre nem jár pont, ahol a tanuló a hibát elkövette. Ha a hibás részeredménnyel helyes gondolatmenet alapján tovább dolgozik, és a megoldandó probléma lényegében nem változik meg, akkor a következő részpontszámokat meg kell adni.
4. **Elvi hibát** követően egy gondolati egységen belül (ezeket az útmutatóban kettős vonal jelzi) a formálisan helyes matematikai lépésekre sem jár pont. Ha azonban a tanuló az elvi hibával kapott rossz eredménnyel – mint kiinduló adattal – helyesen számol tovább a következő gondolati egységekben vagy részkérdésekben, akkor ezekre a részekre kapja meg a maximális pontot, ha a megoldandó probléma lényegében nem változott meg.
5. Ha a megoldási útmutatóban zárójelben szerepel egy **megjegyzés** vagy **mértékegység**, akkor ennek hiánya esetén is teljes értékű a megoldás.

-
6. Egy feladatra adott többféle megoldási próbálkozás közül **a vizsgázó által megjelölt változat értékelhető**. A javítás során egyértelműen jelezze, hogy melyik változatot értékelte, és melyiket nem.
 7. A megoldásokért **jutalompont** (az adott feladatra vagy feladatrészre előírt maximális pontszámot meghaladó pont) **nem adható**.
 8. Egy feladatra vagy részfeladatra adott összpontszám **nem lehet negatív**.
 9. Az olyan részszámításokért, részlépésekért **nem jár pontlevonás**, melyek hibásak, de amelyeket a feladat megoldásához a vizsgázó ténylegesen nem használ fel.
 10. A gondolatmenet kifejtése során **a zsebszámológép használata – további matematikai indoklás nélkül – a következő műveletek elvégzésére fogadható el**: összeadás, kivonás, szorzás, osztás, hatványozás, gyökvonás, $n!$, $\binom{n}{k}$ kiszámítása, a függvénytáblázatban fellelhető táblázatok helyettesítése (\sin , \cos , tg , \log és ezek inverzei), a π és az e szám közelítő értékének megadása, nullára rendezett másodfokú egyenlet gyökeinek meghatározása. További matematikai indoklás nélkül használhatók a számológépek az átlag és a szórás kiszámítására abban az esetben, ha a feladat szövege kifejezetten nem követeli meg az ezzel kapcsolatos részletszámítások bemutatását is. **Egyéb esetekben a géppel elvégzett számítások indoklás nélküli lépéseknek számítanak, így azokért nem jár pont**.
 11. Az **ábrák** bizonyító erejű felhasználása (például adatok leolvasása méréssel) nem elfogadható.
 12. **Valószínűségek** megadásánál (ha a feladat szövege másképp nem rendelkezik) a százalékban megadott helyes válasz is elfogadható.
 13. Ha egy feladat szövege nem ír elő kerekítési kötelezettséget, akkor az útmutatóban megadottól eltérő, **ésszerű és helyes kerekítésekkel** kapott rész- és végeredmény is elfogadható.
 14. **A vizsgafeladatsor II. részében kitzűzött 5 feladat közül csak 4 feladat megoldása értékelhető**. A vizsgázó az erre a célra szolgáló négyzetben – feltehetőleg – megjelölte annak a feladatnak a sorszámát, amelynek értékelése nem fog beszámítani az összpontszámába. Ennek megfelelően a megjelölt feladatra esetlegesen adott megoldást nem is kell javítani. Ha a vizsgázó nem jelölte meg, hogy melyik feladat értékelését nem kéri, és a választás ténye a dolgozatból sem derül ki egyértelműen, akkor a nem értékelendő feladat automatikusan a kitzűzött sorrend szerinti utolsó feladat lesz.

I.

1. a)		
(A paralelogramma területét megkapjuk, ha az $ABCD$ négyzet területéből levonjuk a négy derékszögű háromszög területét.) 	1 pont	
$BF = DH = 4 - x$ és $AE = CG = 4 - 2x$.		
$T(x) = 16 - 2 \cdot \frac{x(4 - 2x)}{2} - 2 \cdot \frac{2x(4 - x)}{2}$	1 pont	
$T(x) = 16 - 4x + 2x^2 - 8x + 2x^2$	1 pont	
Összevonás után: $T(x) = 4x^2 - 12x + 16$, ami a bizonyítandó állítás volt.	1 pont	
Összesen:	4 pont	

1. b) első megoldás		
$T(x) = 4(x^2 - 3x + 4) = 4(x - 1,5)^2 + 7$	2 pont	
A másodfokú tag együtthatója pozitív, ezért a T -nek minimuma van az $x = 1,5$ helyen (ami a $0 < x < 2$ feltételnek megfelel).	2 pont	
Összesen:	4 pont	

Megjegyzés: Teljes pontszámot kapjon a vizsgázó, ha megállapítja, hogy a $4x^2 - 12x + 16$ kifejezésnek minimuma van (mert a főegyüttható pozitív), és akkor minimális, ha

$$x = -\frac{b}{2a} = \frac{12}{8} = 1,5 \text{ (ami a } 0 < x < 2 \text{ feltételnek megfelel).}$$

1. b) második megoldás		
T -nek ott lehet minimuma, ahol az első deriváltja 0.	1 pont	<i>Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.</i>
$T'(x) = 8x - 12 = 0$	1 pont	
$x = 1,5$ (ami a $0 < x < 2$ feltételnek megfelel).	1 pont	
$T''(1,5) = 8 > 0$ miatt itt valóban minimuma van T -nek.	1 pont	<i>A T' negatívból pozitívba megy át $x = 1,5$-nél, ezért T-nek itt minimuma van.</i>
Összesen:	4 pont	

1. c) első megoldás		
<p>Az ábra jelöléseit használjuk. (Mivel $x = 1,25$, ezért) $HA = 1,25$ és $AE = 4 - 2 \cdot 1,25 = 1,5$, $BE = 2,5$ és $BF = 4 - 1,25 = 2,75$.</p>	1 pont	
<p>A HAE derékszögű háromszögben $\operatorname{tg} \alpha = \frac{1,25}{1,5} = \frac{5}{6} (\approx 0,833)$.</p>	1 pont	
<p>Az FBE derékszögű háromszögben: $\operatorname{tg} \beta = \frac{2,75}{2,5} = 1,1$.</p>	1 pont	
<p>$\alpha \approx 39,8^\circ$ és $\beta \approx 47,7^\circ$.</p>	1 pont	<p>Addíciós képlet szerint:</p> $\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\frac{5}{6} + \frac{11}{10}}{1 - \frac{5}{6} \cdot \frac{11}{10}} = 23,2.$
<p>$\alpha + \beta \approx 87,5^\circ$, ezért $\epsilon \approx 92,5^\circ$.</p>	1 pont	
<p>(A paralelogramma szemközti szögei egyenlők, szomszédos szögei pedig kiegészítő szögek, ezért) a paralelogramma szögei: $87,5^\circ, 92,5^\circ, 87,5^\circ, 92,5^\circ$.</p>	1 pont	
Összesen:	6 pont	

1. c) második megoldás		
<p>Az a) feladat szerint a paralelogramma területe (m^2-ben) $T(1,25) = 4 \cdot 1,25^2 - 12 \cdot 1,25 + 16 = 7,25$.</p>	1 pont	
<p>Az ábra jelöléseit használva: $HA = 1,25$ és $AE = 4 - 2 \cdot 1,25 = 1,5$, $BE = 2,5$ és $BF = 4 - 1,25 = 2,75$.</p>	1 pont	
<p>$HE = \sqrt{1,25^2 + 1,5^2} (\approx 1,953)$ $EF = \sqrt{2,75^2 + 2,5^2} (\approx 3,717)$</p>	1 pont	$HE = \frac{\sqrt{61}}{4}, EF = \frac{\sqrt{221}}{4}$
<p>A paralelogramma egyik szögét jelölje φ. A paralelogramma területe: $T = \frac{\sqrt{61}}{4} \cdot \frac{\sqrt{221}}{4} \cdot \sin \varphi$, amiből $\sin \varphi = \frac{7,25 \cdot 16}{\sqrt{61} \cdot 221} (\approx 0,9991)$.</p>	1 pont	
<p>Ebből $\varphi \approx 87,5^\circ$ vagy $\varphi \approx 180^\circ - 87,5^\circ = 92,5^\circ$.</p>	1 pont	
<p>A paralelogramma szögei: $87,5^\circ, 92,5^\circ, 87,5^\circ, 92,5^\circ$.</p>	1 pont	
Összesen:	6 pont	

2. a)		
Jelölje a mértani sorozat hányadosát q . $q^5 \left(= \frac{384}{12} \right) = 32,$	1 pont	
innen pedig $q = 2$.	1 pont	
A sorozat első hat tagja tehát $\frac{3}{2}, 3, 6, 12, 24$ és $48,$	1 pont	
ezek átlaga $15,75$.	1 pont	
Az ettől mért átlagos abszolút eltérés: $\frac{ 1,5 - 15,75 + 3 - 15,75 + \dots + 48 - 15,75 }{6} =$	1 pont	
$= 13,5.$	1 pont	
Összesen:	6 pont	

2. b)		
A 12 háromféleképpen állítható elő 1-nél nagyobb számjegyek szorzataként: $12 = 6 \cdot 2 = 4 \cdot 3 = 3 \cdot 2 \cdot 2.$	1 pont	
A számjegyek összege akkor lesz 12, ha ezen számjegyek mellett még megfelelő számú 1-es számjegyet tartalmaz a szám. (Tetszőleges számú 1-es hozzávételével a számjegyek szorzata továbbra is 12 marad.)	1 pont	<i>Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.</i>
Olyan szám, amely 1 db 6-ost, 1 db 2-est, valamint $(12 - 6 - 2 =) 4$ db 1-est tartalmaz, $6 \cdot 5 (= 30)$ db van. (A 6-ost hat helyre tehetjük, a 2-est a fennmaradó öt hely bármelyikére.)	1 pont	$\frac{6!}{4!} (= 30)$
Olyan szám, amely 1 db 4-est, 1 db 3-ast, valamint $(12 - 4 - 3 =) 5$ db 1-est tartalmaz, $7 \cdot 6 (= 42)$ db van;	1 pont	$\frac{7!}{5!} (= 42)$
olyan pedig, amely 2 db 2-est, 1 db 3-ast, valamint $(12 - 2 \cdot 2 - 3 =) 5$ db 1-est tartalmaz, $\binom{8}{2} \cdot 6 (= 168)$ db van.	2 pont	$\frac{8!}{2! \cdot 5!} (= 168)$
Összesen tehát $30 + 42 + 168 = 240$ olyan szám van, amely a feltételeknek megfelel.	1 pont	
Összesen:	7 pont	

3. a)		
$\frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{2x} + \frac{1}{9} \cdot \left(\frac{1}{9}\right)^x = 324$	1 pont	
$\left(\frac{1}{3}\right)^{2x} = \left(\frac{1}{9}\right)^x$, így $\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{9}\right)\left(\frac{1}{9}\right)^x = 324$, azaz $\frac{4}{9} \cdot \left(\frac{1}{9}\right)^x = 324$.	2 pont	
$\left(\frac{1}{9}\right)^x = 729$	1 pont	
($729 = 9^3$ és az exponenciális függvény kölcsönös egyértelműsége miatt) $x = -3$.	1 pont	$x = \log_{\frac{1}{9}} 729 = -3$
Ellenőrzés behelyettesítéssel vagy ekvivalenciára hivatkozással.	1 pont	
Összesen:	6 pont	

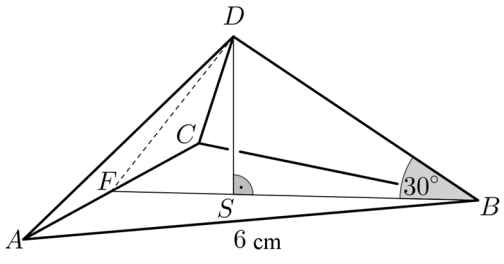
3. b) első megoldás		
(Négyzetre emelve:) $6x - 24 = 2x - 7 + 1 - 2\sqrt{2x - 7}$	1 pont	
$2\sqrt{2x - 7} = 18 - 4x$	1 pont	
(Kettővel osztva, négyzetre emelve és rendezve:) $2x - 7 = 81 - 36x + 4x^2$, azaz $4x^2 - 38x + 88 = 0$.	1 pont	
A másodfokú egyenlet egyik gyöke $x = 4$, és ez kielégíti az eredeti egyenletet (mindkét oldal értéke 0).	2 pont	
A másik gyök $x = 5,5$. Behelyettesítéssel látható, hogy ez nem megoldása az eredeti egyenletnek (a bal oldal értéke 3, a jobb oldal értéke 1).	2 pont	
Összesen:	7 pont	

3. b) második megoldás		
Értelmezési tartomány: $x \geq 4$. Ezen a halmazon mindkét oldal nemnegatív, így a négyzetre emelés ekvivalens átalakítás.	1 pont	
$6x - 24 = 2x - 7 + 1 - 2\sqrt{2x - 7}$	1 pont	
$2\sqrt{2x - 7} = 18 - 4x$	1 pont	
A bal oldal nemnegatív, ezért szükséges, hogy a jobb oldal is nemnegatív legyen, tehát $x \leq 4,5$. A kapott egyenlet mindkét oldala nemnegatív a $[4; 4,5]$ halmazon, ezért itt (2-vel osztás után) a négyzetre emelés ekvivalens átalakítás.	1 pont	
$2x - 7 = 81 - 36x + 4x^2$, azaz $4x^2 - 38x + 88 = 0$.	1 pont	
A másodfokú egyenlet gyökei $x = 4$ és $x = 5,5$.	1 pont	
Az 5,5 nem eleme a $[4; 4,5]$ halmaznak, a 4 viszont igen, és mivel ezen a halmazon ekvivalens átalakításokat végeztünk, ez egyben az egyenlet egyetlen megoldása.	1 pont	
Összesen:	7 pont	

3. b) harmadik megoldás		
Értelmezési tartomány: $x \geq 4$.	1 pont	
$\sqrt{6x - 24} + 1 = \sqrt{2x - 7}$ Négyzetre emelve: $6x - 24 + 2\sqrt{6x - 24} + 1 = 2x - 7$.	1 pont	
$\sqrt{6x - 24} = 8 - 2x$	1 pont	$\sqrt{6(x-4)} = 2(4-x)$
(Behelyettesítéssel látható, hogy) $x = 4$ megoldása az egyenletnek és az eredeti egyenletnek is.	1 pont*	
(Az értelmzési tartományon) a $\sqrt{6x - 24} = 8 - 2x$ egyenlet bal oldala szigorúan monoton növekedő, a jobb oldala pedig szigorúan monoton csökkenő,	2 pont*	<i>Ha $x > 4$, akkor az egyenlet bal oldala pozitív, jobb oldala pedig negatív,</i>
ezért más megoldása nincs az egyenletnek.	1 pont*	<i>ezért 4-nél nagyobb szám nem lehet gyöke az egyenletnek.</i>
Összesen:	7 pont	

*Megjegyzés: A *-gal jelzett pontokat az alábbi gondolatmenetért is megkaphatja a vizsgázó.*

Az egyenlet bal oldalán nemnegatív szám áll, ezért a jobb oldalon is ennek kell teljesülnie:	1 pont	
$8 - 2x \geq 0$, vagyis $x \leq 4$.	1 pont	
Ezt az értelmzési tartománnyal összevetve adódik, hogy csak $x = 4$ lehet megoldása az egyenletnek.	1 pont	
Behelyettesítéssel látható, hogy a 4 valóban megoldása az eredeti egyenletnek.	1 pont	

4. a)		
 <p>Az ábra jelöléseit használjuk. A gúla ABC alaplapjának középpontja (súlypontja) S. DS merőleges az alaplapra, a feltétel szerint pedig $\angle SBD = 30^\circ$.</p>	1 pont	
<p>BS az ABC szabályos háromszög magasságának (súlyvonalának) kétharmada:</p> $BS = \frac{2}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 6 = 2\sqrt{3} (\approx 3,46) \text{ (cm)}.$	2 pont	
<p>A gúla testmagassága $DS = BS \cdot \operatorname{tg}30^\circ = 2 \text{ (cm)}$.</p>	1 pont	
<p>Az ABC háromszög területe:</p> $T = \frac{AB^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = \frac{6^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = 9\sqrt{3} (\approx 15,59) \text{ (cm}^2\text{)}.$	1 pont	
<p>A gúla térfogata: $V = \frac{T \cdot DS}{3} = 6\sqrt{3} (\approx 10,4) \text{ cm}^3$.</p>	1 pont	
Összesen:	6 pont	

4. b)		
<p>Ha az 1-es, a 2-es és a 3-as dobás valószínűsége p, akkor a 4-es dobás valószínűsége $5p$.</p>	1 pont	<i>Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.</i>
<p>$p + p + p + 5p = 8p = 1$, ezért $p = \frac{1}{8}$.</p>	1 pont	
<p>(A dobott számok összege akkor lehet 6, ha az egyik tetraéderrel 2-t, a másikkal pedig 4-et, vagy ha mindkettővel 3-at dob a bűvész.) Annak a valószínűsége, hogy az egyik tetraéderrel 2-t, a másikkal pedig 4-et dob a bűvész,</p> $2 \cdot p \cdot 5p = 10p^2 = \frac{10}{64},$	1 pont	
<p>annak a valószínűsége pedig, hogy mindkét tetraéderrel 3-at dob, $p \cdot p = p^2 = \frac{1}{64}$.</p>	1 pont	
<p>A kért valószínűség ezek összege: $\frac{11}{64} (\approx 0,172)$.</p>	1 pont	
Összesen:	5 pont	

II.

5. a)		
(A szakaszok hosszát cm-ben mérve) $2a + c = 18$ miatt $c = 18 - 2 \cdot 7 = 4$.	1 pont	
$a + 2b + c = 33$ miatt $b = \frac{33 - 7 - 4}{2} = 11$.	1 pont	
A téglatest térfogata: $abc = 7 \cdot 11 \cdot 4 = 308 \text{ cm}^3$.	1 pont	
Összesen:	3 pont	

5. b) első megoldás		
(A térfogatot az egyik él hosszának segítségével fejezzük ki.) $\begin{cases} 2a + c = 18 \\ a + 2b + c = 33 \end{cases}$ A egyenletrendszer első egyenletéből: $c = 18 - 2a$.	1 pont	
A második egyenletbe helyettesítve: $2b = 33 - a - c = 33 - a - (18 - 2a) = a + 15$, ezért $b = \frac{a}{2} + 7,5$.	1 pont	
$V = abc = a \left(\frac{a}{2} + 7,5 \right) (18 - 2a) \quad (0 < a < 9)$	1 pont	
A $V(a) = a \left(\frac{a}{2} + 7,5 \right) (18 - 2a); 0 < a < 9$ függvénynek ott lehet maximuma, ahol $V'(a) = 0$.	1 pont	<i>Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.</i>
$V(a) = -a^3 - 6a^2 + 135a$	1 pont	
$V'(a) = -3a^2 - 12a + 135 = -3(a^2 + 4a - 45)$	1 pont	
$a^2 + 4a - 45 = 0$ gyökei 5 és -9 (a -9 nem lehetséges, az 5 pedig megfelel).	1 pont	
$V''(a) = -6a - 12$ és így $V''(5) < 0$, tehát V -nek (abszolút) maximuma van $a = 5$ -nél.	1 pont	<i>Az $a = 5$ helyen a V' függvény pozitívból negatívba megy át, ezért itt V-nek maximuma van.</i>
A téglatest térfogata maximális (400 cm^3), ha éleinek hossza $a = 5 \text{ cm}$, $b = 10 \text{ cm}$ és $c = 8 \text{ cm}$.	1 pont	
Összesen:	9 pont	

5. b) második megoldás		
(A térfogatot az egyik él hosszának segítségével fejezzük ki.) $A \begin{cases} 2a+c=18 \\ a+2b+c=33 \end{cases}$ egyenletrendszer két egyenletének különbségéből: $a - 2b = -15$, vagyis $a = 2b - 15$.	1 pont	
Ezt az első egyenletbe helyettesítve kapjuk, hogy $c = 18 - 2(2b - 15) = 48 - 4b$.	1 pont	
A téglatest térfogata $V = abc = (2b - 15)b(48 - 4b)$ (ahol $7,5 < b < 12$).	1 pont	
A $V(b) = 4b(2b - 15)(12 - b)$; $7,5 < b < 12$ függvénynek ott lehet maximuma, ahol $V'(b) = 0$.	1 pont	<i>Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.</i>
$V(b) = -8b^3 + 156b^2 - 720b$	1 pont	
$V'(b) = -24b^2 + 312b - 720 = 24(-b^2 + 13b - 30)$	1 pont	
$-b^2 + 13b - 30 = 0$ gyökei a 10 és a 3 (a 3 nincs a V értelmezési tartományában, a 10 pedig megfelel).	1 pont	
A $b = 10$ helyen a V' függvény pozitívból negatívba megy át, ezért itt V -nek (abszolút) maximuma van.	1 pont	$V''(b) = 24(-2b + 13)$ és $V''(10) = -168 < 0$, ezért V -nek itt maximuma van.
A téglatest térfogata maximális (400 cm^3), ha éleinek hossza $b = 10 \text{ cm}$, $a = 5 \text{ cm}$ és $c = 8 \text{ cm}$.	1 pont	
Összesen:	9 pont	

Megjegyzések:

1. Ha a vizsgázó válaszait mértékegység nélkül adja meg, akkor ezért a feladatban összesen 1 pontot veszítsen.

2. $V(c) = \frac{1}{8}(c^3 - 66c^2 + 864c)$, ahol $0 < c < 18$;

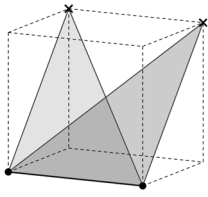
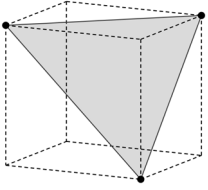
$$V'(c) = \frac{3}{8}(c^2 - 44c + 288);$$

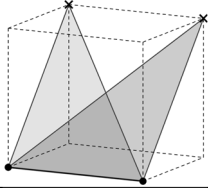
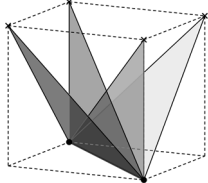
A $c^2 - 44c + 288 = 0$ egyenlet gyökei 8 és 36

(a 36 nincs a V értelmezési tartományában, a 8 pedig megfelel);

$$V''(c) = \frac{3}{4}(c - 22) \text{ és } V''(8) = -10,5 < 0.$$

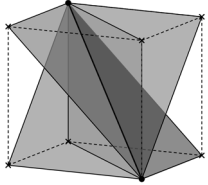
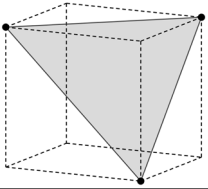
5. c) első megoldás		
A téglatest 8 csúcsa összesen $\binom{8}{3} = 56$ háromszöget határoz meg.	1 pont	
Ezek közül le kell vonni azokat, melyeknek síkja egybeesik a téglatest valamelyik lapjának síkjával. Mind a hat lapon négy ilyen háromszög van, összesen tehát 24.	2 pont	
A megfelelő háromszögek száma $(56 - 24 =) 32$.	1 pont	
Összesen:	4 pont	

5. c) második megoldás		
(A feladat szerint nem választható olyan háromszög, amelynek két oldala a téglatest két élével azonos.) Ha a háromszög egyik oldala a téglatest egy éle, akkor ennek két végpontjához kétféleképpen választhatjuk a háromszög harmadik csúcsát (mert a kiválasztott élben csatlakozó két lap egyik csúcsa sem választható a háromszög harmadik csúcsaként).	1 pont	
(A téglatestnek 12 éle van, ezért) ilyen háromszögből összesen $12 \cdot 2 = 24$ darab van.	1 pont	
Ha a háromszögnek nincs olyan oldala, amelyik a téglatest valamelyik élével azonos, akkor mindhárom oldala a téglatest egy-egy lapjának átlója. A téglatest egy adott csúcsából kiinduló három él nem közös végpontjai egy megfelelő háromszöget határoznak meg. (A téglatestnek 8 csúcsa van, ezért) ilyen háromszögből 8 darab van.	1 pont	
A megfelelő háromszögek száma $24 + 8 = 32$.	1 pont	
Összesen:	4 pont	

5. c) harmadik megoldás		
A téglatest „alsó” lapjáról két szomszédos csúcsot 4-féleképpen választhatunk, ezekhez a feltételnek megfelelően a „felső” lapjáról 2-féleképpen választhatjuk a harmadik csúcsot.	1 pont	
Az alsó lapról két átlellenes csúcsot 2-féleképpen választhatunk, ezekhez a felső lapról 4-féleképpen választhatjuk a harmadik csúcsot.	1 pont	

Tehát $(4 \cdot 2 + 2 \cdot 4 =)$ 16 megfelelő háromszög van, melynek az alsó lapon van két csúcsa, és ugyanígy 16 megfelelő háromszög van, melynek a felső lapon van két csúcsa.	1 pont	
Összesen tehát 32 megfelelő háromszög van.	1 pont	
Összesen:	4 pont	

5. c) negyedik megoldás

A téglatest egy kiválasztott testátlójának két végpontjához a téglatest maradék 6 csúcsának bármelyike választható a háromszög harmadik csúcsának.	1 pont	
(A téglatestnek 4 testátlója van, ezért) ilyen háromszögből összesen $6 \cdot 4 = 24$ darab van.	1 pont	
Ha a háromszögnek nincs olyan oldala, amelyik a téglatest valamelyik testátlója, akkor (nincs olyan oldala sem, amelyik a téglatest valamelyik éle, ezért) mindhárom oldala lapátló. Ilyen háromszögből 8 darab van.	1 pont	
A megfelelő háromszögek száma $24 + 8 = 32$.	1 pont	
Összesen:	4 pont	

6. a)

A háromszög kerülete 30 egység. Jelölje az oldalak hosszát x , x és $30 - 2x$.	1 pont	
A szórás miatt: $\sqrt{\frac{(10-x)^2 + (10-x)^2 + (2x-20)^2}{3}} = 3\sqrt{2}.$	1 pont	
$200 - 40x + 2x^2 = 18$ $2x^2 - 40x + 182 = 0$ $x^2 - 20x + 91 = 0$	1 pont	$\sqrt{2(10-x)^2} = 3\sqrt{2}$ $\sqrt{(10-x)^2} = 3$ $ 10-x = 3$
$x = 7$ vagy $x = 13$	1 pont	
A háromszög oldalai az első esetben 7, 7, 16 egység, a második esetben 13, 13, 4 egység.	1 pont	
Ellenőrzés: Az első eset nem lehetséges, mert nem teljesül a háromszög-egyenlőtlenség. A második eset lehetséges, mert teljesül a háromszög-egyenlőtlenség (és a szórás $\sqrt{\frac{3^2 + 3^2 + 6^2}{3}} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$ valóban).	1 pont	
Összesen:	6 pont	

6. b)		
Az e egyenes az x tengelyt a $D(-4; 0)$ pontban (az y tengelyt pedig a $(0; 3)$ pontban) metszi.	1 pont	
(Keressük BC és az e egyenes M metszéspontját.) A BC egyenes egy normálvektora $(4; 3)$,	1 pont	
egyenlete $4x + 3y = 24$.	1 pont	
A BC és az e egyenes M metszéspontját a $\left. \begin{aligned} 4x + 3y &= 24 \\ 3x - 4y &= -12 \end{aligned} \right\} \text{ egyenletrendszer megoldása adja.}$ Az első egyenlet 4-szeresének és a második egyenlet 3-szorosának összegét véve: $25x = 60$.	1 pont	<i>Az első egyenletből $x = 6 - 0,75y$, amit a másodikba helyettesítve: $18 - 6,25y = -12$. $6,25y = 30$</i>
$x = 2,4$ és $y = 4,8$, tehát $M(2,4; 4,8)$.	1 pont	
A DBM háromszög területe: $\frac{10 \cdot 4,8}{2} = 24$.	1 pont	
Mivel az ABC háromszög területe: $\frac{12 \cdot 8}{2} = 48$, az e valóban felezi az ABC háromszög területét.	1 pont	
(A Pitagorasz-tételből) $AC = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10$, az ABC háromszög kerülete ezért $2 \cdot 10 + 12 = 32$.	1 pont	
$BM = \sqrt{3,6^2 + 4,8^2} = 6$, $DB + BM = 10 + 6 = 16$,	1 pont	
tehát az e egyenes valóban felezi az ABC háromszög kerületét is.	1 pont	
Összesen:	10 pont	

7. a)		
Az I. állítás hamis.	1 pont	
Az öt számjegy között biztosan lesz három azonos paritású, így az ezeknek megfelelő csúcsok egy hárompontú kört alkotnak a gráfban, ezért az nem lehet fagráf.	1 pont	
A II. állítás igaz.	1 pont	
Egy megfelelő példa. (Ha például egy páros és négy páratlan számjegyet írunk le, akkor a páros számnak megfelelő csúcs a gráfban izolált pont lesz, ezért ez a gráf nem összefüggő.)	1 pont	
Összesen:	4 pont	

7. b)		
Legyen a célállomások száma a két évvel ezelőtti időpontban n , jelenleg pedig $1,5n$ (n így páros). A járatok száma korábban $\binom{n}{2}$ volt, jelenleg $\binom{1,5n}{2}$.	1 pont	<i>Jelenleg m, két éve $\frac{2}{3}m$ célállomás esetén:</i>
A feltétel szerint $\binom{n}{2} + 60 = \binom{1,5n}{2}$.	1 pont	$\binom{\frac{2}{3}m}{2} + 60 = \binom{m}{2}$.
$\frac{n(n-1)}{2} + 60 = \frac{1,5n(1,5n-1)}{2}$	1 pont	$\frac{\frac{2}{3}m(\frac{2}{3}m-1)}{2} + 60 = \frac{m(m-1)}{2}$
Nullára rendezve: $0 = 1,25n^2 - 0,5n - 120$.	1 pont	$0 = \frac{5}{9}m^2 - \frac{1}{3}m - 120$
Ennek egyik gyöke $-9,6$, ami nem megoldása a feladatnak, a másik gyöke pedig 10 .	1 pont	<i>$A = 14,4$ nem megoldás, a másik gyök pedig 15.</i>
Jelenleg ($10 \cdot 1,5 =$) 15 célállomásra közlekednek.	1 pont	
Ellenőrzés: két éve 45 , jelenleg 105 járatot közlekedtetnek, és $105 = 45 + 60$ valóban igaz.	1 pont	
Összesen:	7 pont	

Megjegyzés: Ha a vizsgázó az $\binom{n}{2}$ értékeinek felsorolása (1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, 36, 45, 55,

66, 78, 91, 105, ...) alapján megállapítja, hogy 10 korábbi és 15 jelenlegi célállomás megfelel a feladat feltételeinek ($10 \cdot 1,5 = 15$, illetve $105 - 45 = 60$), akkor erre a gondolatmenetere 3 pontot kapjon.

További 4 pontot kapjon, ha bizonyítja, hogy nincs más megoldása a feladatnak.

Például: Az n (a feladat szövege alapján) páros, ezért $n = 2k$ és $1,5n = 3k$ ($k \in \mathbf{N}^+$).

$$\binom{3k}{2} - \binom{2k}{2} = 2,5k(k-0,2) \quad (2 \text{ pont}),$$

ami $k \geq 1$ esetén szigorúan monoton növekszik (1 pont), tehát más megoldás nincs (1 pont).

7. c)		
A modell szerint $0,968$ annak a valószínűsége, hogy valaki megjelenik az indulásnál.	1 pont	<i>Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.</i>
Annak a valószínűsége, hogy 169 utas jelenik meg: $P(169) = \binom{170}{169} \cdot 0,968^{169} \cdot 0,032 \approx 0,022$.	1 pont	
Annak a valószínűsége, hogy 170 utas jelenik meg: $P(170) = 0,968^{170} \approx 0,004$.	1 pont	
Annak a valószínűsége tehát, hogy legfeljebb 168 utas jelenik meg: $1 - P(169) - P(170) \approx 0,974$.	1 pont	
A légitársaság által fizetendő kártérítés várható értéke: $P(169) \cdot 600 + P(170) \cdot 1200 \approx 18$ euró.	1 pont	
Összesen:	5 pont	

8. a)		
Megoldandó az $\frac{n^2 - 5n + 10}{2} = 26$ egyenlet.	1 pont	
Nullára rendezve $n^2 - 5n - 42 = 0$.		
Ennek a gyökei (kb. 9,45 és -4,45) nem egészek,	1 pont	
így nincs olyan szó, amelyért 26 pontot kap a játékos.	1 pont	
Összesen:	3 pont	

Megjegyzés: Teljes pontszámot kapjon a vizsgázó, ha megállapítja, hogy a kilencbetűs szóért 23, a tízbetűsért 30 pont jár (1 pont), majd a b) feladat állítására hivatkozva (1 pont) bizonyítottnak tekinti, hogy 26 pont nem kapható (1 pont).

8. b)		
Hárombetűs szóért (a képlet alapján) 2 pont jár, és ez több, mint a kétbetűs szóért járó 1 pont.	1 pont	
Legyen $f(n) = \frac{n^2 - 5n + 10}{2}$ (ahol $n \geq 3$ és $n \in \mathbf{N}$). Igazolni kell, hogy $f(n+1) > f(n)$.	1 pont	<i>Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.</i>
$f(n+1) = \frac{(n+1)^2 - 5(n+1) + 10}{2} = \frac{n^2 - 3n + 6}{2}$,	1 pont*	
az $\frac{n^2 - 3n + 6}{2} > \frac{n^2 - 5n + 10}{2}$ egyenlőtlenséget (ekvivalens lépésekkel) átrendezve $n > 2$ adódik. Ez ($n \geq 3$ miatt) teljesül, ami éppen azt jelenti, hogy hosszabb szóért több pont jár.	1 pont*	
Mivel $n^2 - 5n = n(n-5)$ két ellentétes paritású tényező szorzata, ezért páros, tehát $f(n)$ egész szám.	2 pont	
Összesen:	6 pont	

*Megjegyzés: A *-gal jelölt 2 pontot az alábbi gondolatmenetért is megkaphatja a vizsgázó.*

Teljes négyzetté alakítással kapjuk, hogy $f(n) = 0,5(n-2,5)^2 + 1,875$.	1 pont	
Az $x \mapsto 0,5(x-2,5)^2 + 1,875$ másodfokú függvény szigorúan monoton növekedő, ha $x \geq 2,5$. Ebből következik, hogy $f(n+1) > f(n)$ is teljesül, ha $n \geq 3$ és $n \in \mathbf{N}$.	1 pont	

8. c) első megoldás		
Megmutatjuk, hogy az $\frac{n^2 - 5n + 10}{2} = 2 + \frac{m(m+1)}{2}$ egyenletnek minden $m \in \mathbf{N}$ paraméter esetén van megoldása az $n \geq 3$ egészek körében.	1 pont	<i>Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.</i>
Nullára rendezve: $n^2 - 5n + (6 - m - m^2) = 0$.	1 pont	$n^2 - 5n + 10 = 4 + m(m + 1)$
A megoldóképletet felírva: $n_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 4(6 - m - m^2)}}{2} = \frac{5 \pm \sqrt{1 + 4m + 4m^2}}{2}$.	1 pont	$n^2 - 5n + 6 = m(m + 1)$
A négyzetgyök alatti kifejezés (a diszkrimináns) teljes négyzet, így $n_{1,2} = \frac{5 \pm (1 + 2m)}{2}$.	1 pont	$(n - 3)(n - 2) = m(m + 1)$
Az egyenlet gyökei tehát $3 + m$ és $2 - m$.	1 pont	<i>Mivel $n \geq 3$, ezért a jobb oldalon és a bal oldalon is két szomszédos természetes szám szorzata áll.</i>
A $3 + m$ mindig 2-nél nagyobb egész szám (a $2 - m$ pedig soha), ezért igaz, hogy tetszőleges m természetes szám esetén a játékos kaphat $2 + \frac{m(m+1)}{2}$ pontot.	1 pont	<i>Az egyenlőség teljesül, ha $n - 3 = m$, azaz $n = m + 3$,</i>
	1 pont	
Összesen:	7 pont	

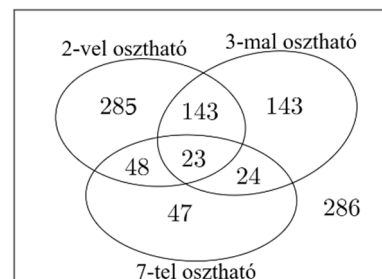
8. c) második megoldás		
Megmutatjuk, hogy az $\frac{n^2 - 5n + 10}{2} = 2 + \frac{m(m+1)}{2}$ egyenletnek minden $m \in \mathbf{N}$ paraméter esetén van megoldása az $n \geq 3$ egészek körében.	1 pont	<i>Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.</i>
Rendezve: $n^2 - 5n + 10 = m^2 + m + 4$.	1 pont	
Mindkét oldalt 4-gyel szorozva: $4n^2 - 20n + 40 = 4m^2 + 4m + 16$, amiből $4n^2 - 20n + 25 = 4m^2 + 4m + 1$.	1 pont	
$(2n - 5)^2 = (2m + 1)^2$	1 pont	
$2n - 5 = 2m + 1$ vagy $2n - 5 = -2m - 1$	1 pont	
$n = m + 3$, amely mindig legalább 3, ezért megfelel (vagy $n = 2 - m$, de ez mindig legfeljebb 2, ezért nem felel meg).	1 pont	
Tehát igaz, hogy tetszőleges m természetes szám esetén a játékos kaphat $2 + \frac{m(m+1)}{2}$ pontot.	1 pont	
Összesen:	7 pont	

8. c) harmadik megoldás								
(Megkeressük m -hez a megfelelő n értéket.) Az első néhány eset táblázatokba foglalva:								
m	0	1	2	3	4	5	6	...
$2 + \frac{m(m+1)}{2}$	2	3	5	8	12	17	23	...
n (a szó hossza)	0	1	2	3	4	5	6	7
$\frac{n^2 - 5n + 10}{2} =$	–	–	–	2	3	5	8	12
A két táblázat alapján az sejthető, hogy az m -hez tartozó pontszámot az $n = m + 3$ hosszúságú szóra kapjuk meg ($m = 0$ esetén $n = 3$, $m = 1$ esetén $n = 4$, $m = 2$ esetén $n = 5$ megfelelő, és így tovább).								
$\frac{(m+3)^2 - 5(m+3) + 10}{2} = \frac{m^2 + 6m + 9 - 5m - 15 + 10}{2} =$								
$= \frac{m^2 + m + 4}{2} = \frac{4 + m(m+1)}{2} = 2 + \frac{m(m+1)}{2},$								
így az $n = m + 3$ valóban minden m esetén megfelelő választás.								
Összesen:								
								7 pont

9. a) első megoldás		
42 = 2 · 3 · 7, így azokat az 1000-nél kisebb pozitív egész számokat keressük, melyek nem oszthatók sem 2-vel, sem 3-mal, sem 7-tel.	1 pont	
1-től 999-ig 2-vel osztható szám 499 darab, 3-mal osztható 333 darab, 7-tel osztható 142 darab van;	1 pont	<i>A 500 darab páratlan szám között 167 darab 3-mal osztható és 71 darab 7-tel osztható van,</i>
2-vel és 3-mal (azaz 6-tal) osztható szám 166 darab, 2-vel és 7-tel (azaz 14-gyel) osztható szám 71 darab, 3-mal és 7-tel (azaz 21-gyel) osztható szám 47 darab;	1 pont	
végül 2-vel, 3-mal és 7-tel (azaz 42-vel) osztható szám 23 darab van.	1 pont	<i>a 3-mal és 7-tel is oszthatók száma pedig 24.</i>
A keresett számok száma (logikai szita formulával) $999 - (499 + 333 + 142) + (166 + 71 + 47) - 23 =$	1 pont*	$500 - 167 - 71 + 24 =$
$= 286.$	1 pont*	
Összesen:		
		6 pont

*Megjegyzés: A *-gal jelölt pontok akkor is járnak, ha a vizsgázó a megfelelő halmazábra részhalmazai elemszámának összeadásával jut helyes eredményre:*

$$999 - (285 + 143 + 47 + 143 + 24 + 48 + 23) = 286.$$



9. a) második megoldás		
1-től 42-ig a 42-höz relatív prímek: 1, 5, 11, 13, 17, 19, 23, 25, 29, 31, 37, 41, ez 12 darab.	1 pont*	
(Ha k relatív prím a 42-höz, akkor $k + 42$ is, ezért) bármelyik 42 egymást követő egész szám között 12 megfelelő szám van.	1 pont	<i>Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.</i>
$999 = 23 \cdot 42 + 33$	1 pont	
Így 1-től ($23 \cdot 42 =$) 966-ig $23 \cdot 12 = 276$ megfelelő szám van,	1 pont	
967-től 999-ig pedig annyi, amennyi 1-től 33-ig, azaz 10 darab.	1 pont	
A keresett számok száma ($276 + 10 =$) 286.	1 pont	
Összesen:	6 pont	

Megjegyzés: A *-gal jelölt pont akkor is jár, ha a vizsgázó az adott számhoz a nála kisebb relatív prímek számát megadó $\varphi(n)$ függvényre hivatkozik:

$$\varphi(42) = 42 \cdot \left(1 - \frac{1}{2}\right) \left(1 - \frac{1}{3}\right) \left(1 - \frac{1}{7}\right) = 12.$$

9. b)		
Az n -edik L alakú sávban a számok összege $n + 2n + 3n + \dots + (n - 1)n + n \cdot n +$ $+ n(n - 1) + n(n - 2) + \dots + n \cdot 2 + n =$	1 pont	$2 \cdot (n + 2n + 3n + \dots + (n - 1)n + n \cdot n) - n \cdot n$
$n \cdot ((1 + 2 + \dots + n - 1) \cdot 2 + n) =$	1 pont	$2n(1 + 2 + 3 + \dots + n) - n^2 =$
$= n \cdot (n(n - 1) + n) =$	1 pont	$= 2n \cdot \frac{n(n + 1)}{2} - n^2 =$
$= n^3.$	1 pont	
Összesen:	4 pont	

9. c) első megoldás		
Teljes indukciót alkalmazunk. $n = 1$ -re az állítás igaz: $K_1 = 1^3 = \left(\frac{1 \cdot (1 + 1)}{2}\right)^2.$	1 pont	
Tegyük fel, hogy az állítás igaz valamely m pozitív egészre, azaz $K_m = 1^3 + 2^3 + \dots + m^3 = \left(\frac{m(m + 1)}{2}\right)^2.$ Be kell látni, hogy az állítás $(m + 1)$ -re is teljesül, azaz $K_{m+1} = 1^3 + 2^3 + \dots + m^3 + (m + 1)^3 = \left(\frac{(m + 1)(m + 2)}{2}\right)^2.$ Az indukciós feltevést felhasználva tehát igazolandó, hogy: $\left(\frac{m(m + 1)}{2}\right)^2 + (m + 1)^3 = \left(\frac{(m + 1)(m + 2)}{2}\right)^2.$	2 pont	

Osztunk $(m+1)^2$ -nel, majd szorzunk 4-gyel: $\left(\frac{m}{2}\right)^2 + (m+1) = \left(\frac{m+2}{2}\right)^2 \Leftrightarrow$ $m^2 + 4(m+1) = (m+2)^2 \Leftrightarrow$ $m^2 + 4m + 4 = m^2 + 4m + 4.$	2 pont	
A két oldal egyenlő, és ekvivalens átalakításokat végeztünk, tehát az eredeti állítás minden pozitív egész n -re igaz.	1 pont	<i>Ez a pont nem jár, ha a vizsgázó nem hivatkozik az ekvivalenciára.</i>
Összesen:	6 pont	

9. c) második megoldás

Teljes indukcióval bizonyítunk. $n = 1$ -re igaz az állítás ($1 = 1$).	1 pont	
Ha az állítás valamely $m \in \mathbb{N}^+$ -re igaz: $K_m = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + m^3 = \left(\frac{m(m+1)}{2}\right)^2,$	1 pont	
akkor igaz az is, hogy $K_{m+1} = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + m^3 + (m+1)^3 =$ $= \left(\frac{m(m+1)}{2}\right)^2 + (m+1)^3 =$	1 pont	
$= (m+1)^2 \left(\frac{m^2}{4} + m + 1\right) = (m+1)^2 \cdot \frac{m^2 + 4m + 4}{4} =$	1 pont	
$= (m+1)^2 \cdot \frac{(m+2)^2}{4} = \left(\frac{(m+1)(m+2)}{2}\right)^2.$	1 pont	
Az állítás igaz $m+1$ -re is, tehát az eredeti állítás minden pozitív egész n -re igaz.	1 pont	
Összesen:	6 pont	

9. c) harmadik megoldás

A b) feladat megoldása alapján az első n pozitív köbszám összege az első n darab L alakú sávban lévő számok összege, $L_1 + L_2 + \dots + L_n$, ami megegyezik a táblázat bal felső $n \times n$ -es részében lévő számok összegével.	2 pont	
$(1 + 2 + 3 + \dots + n) + 2 \cdot (1 + 2 + 3 + \dots + n) +$ $+ 3 \cdot (1 + 2 + 3 + \dots + n) + \dots + n \cdot (1 + 2 + 3 + \dots + n) =$	1 pont	
$= (1 + 2 + 3 + \dots + n) \cdot (1 + 2 + 3 + \dots + n) =$	1 pont	
$= \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2.$	1 pont	
Ezzel az állítást igazoltuk.	1 pont	
Összesen:	6 pont	